# משפט

1. אם ו אזי
2. אם אזי

## הוכחה

1. נסמן . אזי ולכן
2. אותו דבר

טורים חיוביים

# הגדרה

הטור נקרא טור חיובי אם לכל n

# משפט

יהי טור חיובי. אם חסומה מלעיל הטור מתכנס. אם אינה חסומה מלעיל הטור מתבדר ל

## הוכחה

הסדרה הינה סדרה לא יורדת, שכן לכל n

# משפט(קריטריון ההשוואה)

יהיו טורים חיוביים. נניח שקיים אינדקס N כך שלכל מתקיים ש. אזי:

1. אם אזי
2. אם אזי

## הוכחה

נשתמש בסימנים שהגדנו כבר. אפשר להניח ש לכל (כי עבור מספר סופי של איברים ראשונים זה לא משפיע על ההתכנסות/התבדרות). ואז ברור ש לכל n. אם אזי חסומה מלעיל (ע"י ) ולכן חסומה מלעיל ולכן

ב) שוב נוכל להניח ש לכל . ע"פ ההנחה ולכן שכן לכן בנסיבות אלה

# דוגמאות

1. . אמנם לכל n וידוע לנו ש שכן
2. . אמנם , וידוע ש לכן

# משפט(מבחן קושי)

יהי טור חיובי.

1. אם קיים ו כך שלכל מתקיים אזי הטור מתכנס.
2. אם יש אינסוף אינדקסים n כך ש הטור מתכנס לאינסוף.

## הערה

לא בהכרח מתקיימת אחת מהתכונות. למשל

## הוכחה

1. אפשר להניח ש. אזי ידוע לנו ש שכן ולכן לפי קריטריון ההשוואה
2. אם אזי עבור אינסוף אינדקסים ולכן

# מסקנה

יהי טור חיובי.

1. אם הטור מתכנס
2. אם הטור מתבדר

## הוכחה

1. אם קח ואז מתקיים לכל n מספיק גדול
2. אם אזי יש אינסוף אינדקסים n כך ש ולכן ע"פ ב) של המשפט הקודם הטור מתבדר

# מבחן דאלמבר(D'Alembert)

יהי טור חיובי

1. אם קיים ו כך שלכל מתקיים הטור מתכנס.
2. אם קיים N כך שלכל מתקיים אזי הטור מתבדר.

## הוכחה

1. אפשר להניח ש. אזי מתקיים
2. עבור מתקיים ומכאן ברור ש ולכן

# מסקנה

יהי טור חיובי.

1. אם אזי הטור מתכנס
2. אם אזי הטור מתבדר

## הוכחה

תרגיל

# הקשר בין מבחן קושי למבחן דאלמבר

הגבולות במבחן קושי קיימים אם קיימים גם הגבולות במבחן דאלמבר, לכן מבחן קושי חזק יותר ממבחן דאלמבר, אבל יותר קל לישם את מבחן דאלמבר ממבחן קושי

# דוגמה

באשר

# משפט

יהי טור חיובי ונניח ש לא עולה. אם הטור מתכנס, אזי

## הוכחה

יהי . קיים כך שאם אזי . יהי וקח קיבלנו ש ז"א

עכשיו קח , אזי ז"א .𝑝𝑠𝑖𝑙𝑜𝑛 ש יותר קל לישם את מבחן דאלמבר ממבחן קושיבר, לכן מבחן קושי חזק יותר ממ

לכן בין אם ניקח או אזי עבור מתקיים ז"א (שכן )

# דוגמה

# משפט העיבוי

יהי טור חיובי ונניח ש לא עולה. אזי הטורים ו מתכנסים ומתבדרים יחד.

## הוכחה

נסמן . עבור קיים כך ש. ואז:

*מכאן רואים שאם מתכנסת גם מתכנסת.*

*נסמן*

# דוגמה

מתכנס אם ורק אם

## הוכחה

אם ולכן הטור מתבדר. לכן אפשר להניח ש. הטור אם ורק אם ולפי משפט העיבוי  
 וזה מתכנס רק אם <1 כלומר כלומר